

2018 年度湖南省自然科学奖推荐公示

一、项目名称

几类分数阶微分方程的理论及数值方法

二、推荐单位意见

分数阶微分方程是一类具有广泛应用背景的数学模型，能更好描述许多复杂过程和现象，其建模、理论、计算、应用已成为众多领域的研究热点。

该项目针对几类典型分数阶微分方程理论和数值计算中的一些关键问题率先进行了深入系统研究，其主要科学发现有：发现了非线性时间分数阶系统的长时间收缩性、耗散性及其代数衰减率，建立了相应理论，为分数阶系统稳定性研究奠定基础；发现并构造保能量辛可分 Runge-Kutta 方法，实质推进 Hamilton 系统数值方法保辛和能量守恒问题的解决；发现并提出空间分数阶 Schrodinger 方程的保质量差分格式，为分数阶量子力学系统模拟提供了有效算法；发现并提出变系数空间分数阶对流扩散方程的加权差分方法，统一著名专家的相应工作；发现并获求解分数阶变分问题的有效新方法：分数阶变分积分；发现并证明分数阶 Halanary 不等式和离散空间分数阶嵌入不等式，为相关理论和数值分析提供有力工具。

该项目成果突出，发表了包括 8 篇代表性论文在内的一批高水平论文，在科学上取得了突破性进展，被国内外同行所公认和广泛引用，在国内外产生了显著的学术影响。该项目研究成果具有重要的理论和应用价值，推动了微分方程数值方法领域乃至计算与应用数学学科的发展，并被应用于神经网络、流体力学等领域。

同意推荐申报湖南省自然科学奖。

三、项目简介

分数阶微分方程在刻画具有遗传记忆特征或者非局部长程效应的复杂过程和现象（如反常扩散）中通常比整数阶微分方程更准确。分数阶微分算子具有弱奇异性及非局部特征：长期历史记忆性或空间全域相关性，这给高效数值方法构造及其理论分析带来了挑战，主要体现在解的奇性、巨大的计算存储量和工作量，并导致长时间数值模拟困难等。近年来，此类方程的建模、理论、计算已成为众多领域的研

究热点，并广泛应用于多孔介质、软物质、信号和图象、生物医学、控制等领域。

保结构算法在上世纪八十年代由著名数学家冯康先生在研究 Hamilton 系统辛算法时奠定基础并发扬光大，已表明它在长时间数值模拟上较传统算法有明显优势。保结构已是设计数值算法的基本原则，深刻影响着计算数学和科学与工程计算的发展。

研究思路：项目开始时，保结构算法仅针对整数阶方程，而关于分数阶方程计算的工作集中分数阶扩散类方程。但分数阶方程也存在守恒量及特性（如质量、能量、对称性等）。因此，项目将保结构思想应用于分数阶微分方程数值方法的构造中，以利于长时间数值模拟；在关注分数阶扩散类方程数值方法的同时，重点研究空间分数阶 Schrödinger 方程、分数阶变分问题等其它典型分数阶方程的数值方法，也研究非线性时间分数阶系统的稳定性。

主要研究内容：非线性时间分数阶系统的长时间稳定性、经典 Hamilton 系统保辛保能量方法、空间分数阶 Schrödinger 方程的守恒差分方法、空间分数阶对流扩散方程的差分方法、分数阶变分问题的变分积分子。

科学发现点和科学价值：(1) 发现了非线性时间分数阶泛函微分方程系统解的长时间收缩性、耗散性及其代数衰减率，建立了相应理论和估计，为分数阶系统稳定性研究奠定了基础；(2) 发现并构造了保能量辛可分 Runge-Kutta 方法，实质推进了 Hamilton 系统数值方法保辛和能量这一公开问题的解决；(3) 发现并提出了空间分数阶 Schrödinger 方程保质量差分格式及保质量和能量差分格式，为分数阶量子力学系统模拟提供了有效算法；(4) 发现并提出了变系数空间分数阶对流扩散方程的加权差分方法，统一了著名专家的相应工作；(5) 发现并构造了求解分数阶变分问题的有效新方法：分数阶变分积分子。特别地，在(1)和(3)中，分别发现并证明了分数阶 Halanary 不等式和离散空间分数阶嵌入不等式，为相关理论和数值分析提供了有力工具。

同行引用及评价：发表相关 SCI 论文 20 多篇。8 篇代表作均发表在高影响期刊，平均影响因子达 2.6，SCI 他引 131 次，篇均 16.4 次，引文来自一流期刊 SIAM J. Sci. Comput., J. Comput. Phys., IEEE T. Neur. Net. Lear.等。得到了美国《数学评论》和包括院士、IEEE Fellow、著名 SCI 期刊（副）主编在内的许多分数阶方程理论和计算及相关领域的国内外著名同行专家的多次引用和高度评价，在国内外产生了重要学术影响。项目主要完成人多次在国内外会议作邀请报告，到香港中文大学等国内外

著名高校进行讲学、访问和合作。培养了一批博、硕士生，其中第二完成人入选了陕西省青年科技新星。

四、客观评价

项目研究成果被美国《数学评论》及 R. Agarwal、D. Baleanu、K. Burrage（牛津大学教授）、L. Brugnano、K. Diethelm（Fract. Calc. Appl. Anal. 副主编）、A. Khaliq、J. Machado、W. McLean（SIAM Numer. Anal. 编委）、I. Podlubny、郭柏灵院士等著名同行专家在研究论文、综述及 Springer、CRC、World Sci. 等著名出版社出版的专著中多次引用，获高度评价。8 篇代表性论文（简称代表作）他引 177 次；SCI 他引 131 次，单篇最高 46 次，篇均 16.4 次。项目主要完成人多次在国内外会议上作邀请报告，到香港中文大学等著名高校进行学术访问（见附件中其他证明：会议邀请报告和访问邀请函）。

1. 对时间分数阶系统稳定性理论及分数阶 Halanary 不等式的代表性评价：

澳大利亚迪肯大学 H. Trinh 教授等在一流工程期刊 IEEE T. Neur. Net. Lear. Sys. (IF: 6.108) 的论文中充分肯定了代表作[1]工作的意义：耗散性及其变形为研究系统稳定性和动力学系统控制提供了有用的工具（原文见附件中代表性引文[1]）。

IEEE Fellow（会士）、欧洲科学院院士、东南大学首席教授曹进德等在著名工程二区期刊 Neura. Net., IF: 5.287) 的论文中，通过 4 处引用完全肯定了代表作[1, 2]的结果，以此（特别是分数阶 Halanary 不等式）为基础，获得了时滞分数阶复值神经网络的耗散性和稳定性结果（原文见附件中代表性引文[2]）。

美国《数学评论》中，评论 MR3324261 认为：代表作[1]是创新的，丰富了分数阶系统的理论，原文：The paper is **innovative** and the proofs are **rigorous**. This is a **well-written** paper containing **interesting and new results**, which **enriches** the theory of fractional-order systems; 评论 MR3433020 认为：代表作[2]的主要成就是首次建立了分数阶 Halanary 不等式，由此获得了时间分数阶系统的耗散性定理，给出了一些富有洞察力 (insightful) 的注记。原文见附件中其他证明：美国数学评论 MR3324261 和 MR3433020 评价。

2. 对保辛保能量参数化可分 Runge-Kutta 方法的代表性评价：

J. Comput. Appl. Math. 等 2 个数学二区期刊的副主编、意大利佛罗伦萨大学教授

L. Brugnano 等在专著《Line Integral Methods for Conservative Problems》(CRC, 2016)、专题讲义、重要论文中多次引用和高度评价了代表作[3]的工作。例如：

Brugnano 等在代表性引文[3]中明确认可：代表作[3]获得了较弱意义下同时保辛结构和能量的方法（原文见附件代表引文[3]）。

Brugnano 在中科院专题讨论班讲义《Line Integral Methods》(arXiv:1301.2367v1, 2013) 指出：代表作[3]的工作是引人注目的（noticeable）拓展（相比他们 2012 年发表在 SIAM J. Numer. Anal. 的论文中关于 Gauss 型参数化 RK 方法的工作而言）。

3. 对空间分数阶非线性耦合 Schrödinger 方程守恒格式的代表性评价：

工程 2 区期刊 J. Franklin Institute 副主编、华中科技大学“华中学者”特聘教授黄乘明等在计算数学一流期刊 J. Comput. Phys. 的论文中明确指出：代表作[4]首次发展了空间分数阶 Schrödinger 方程的守恒型格式，原文：there is very little attention paid to this field. The **only result** we are aware of is given by **Wang et al. in [12]**, who derived a **mass-conservative difference scheme** for the coupled nonlinear fractional Schrödinger equations，其中[12]为代表作[4]。见附件中代表性引文[4]。

著名同行专家、东南大学孙志忠教授课题组在计算数学顶级期刊 SIAM J. Sci. Comput. 的论文中指出：Wang, Xiao and Yang [25] presented CN difference scheme for coupled nonlinear Schrödinger equations with the Riesz space fractional derivative. They proved the existence, the stability, and the convergence of the CN scheme in the L2 norm，其中[25]为代表作[4]。见附件中代表性引文[5]。

Math. Comput. Simulat. (IF: 1.218)等两个著名数学期刊编委、国务院政府特殊津贴专家、华中科技大学“华中学者”特聘教授张诚坚等在代表性引文[6]中，基于代表作[4-6]，研究了强耦合非线性分数阶 Schrödinger 方程的守恒差分格式，并 8 次引用了代表作[4-6]，包括[6]的离散空间分数阶半范等价性等（原文见附件中代表性引文[6]）。

SCI 期刊 Intern. J. Comput. Math. 主编、Numer. Methods PDEs 等 2 个数学二区期刊副主编、美国中田纳西州立大学教授 A. Khaliq 等在论文（数学二区期刊 Numer. Algor., 75 (2017)147–172）中 7 次引用代表作[5]，指出他们是基于我们的线性隐式格式，引入空间 4 阶紧致格式，获非线性空间分数阶 Schrödinger 方程的 4 阶隐显格式。

4. 对变系数空间分数阶对流扩散方程加权有限差分方法的代表性评价:

数学一区期刊 *Fract. Calc. Appl. Anal.* 的副主编及 2 个 SCI 期刊的编委、罗马尼亚空间科学研究所 D. Baleanu 教授等的多篇论文引用了代表作[7], 他在代表性引文[7]中明确指出: 代表作[7] 包括了密歇根州立大学教授 M. Meerschaert 等的相应工作 (原文见附件中代表性引文[7])。

美国明尼苏达大学 V. Voller 教授的论文(发表于工程 SCI 期刊 *Numer. Heat Tr. B* (IF:1.663), 59(2011) 421–441)两处引用代表作[7], 认为[7]等文是重大的 (**significant**) 数值分析进步 (**advance**), 由此提出了非局部扩散的体积控制加权通量格式。

5. 对分数阶变分积分分子的代表性评价:

我国著名分析力学家、国家有突出贡献中青年专家、北京理工大学教授梅凤翔等在力学一区期刊 *Nonlinear Dynam.* 的论文中, 以代表作[8]、我们关于完整约束的工作及 Bourdin 等的论文 (*Appl. Numer. Math.*, 2013) 为基础, 发展了分数阶 Birkhoff 系统的变分积分分子, 原文见附件中代表性引文[8]。

著名国际同行专家 D. Baleanu 等在论文 (发表于数学二区期刊 *J. Optim. Theory. Appl.*, 174(2017) 295-320) 中 5 次引用了代表作[8]并比较了数值结果。

五、代表性论文专著目

序号	论文专著名称/刊名/作者	影响因子	年卷页码 (xx 年 xx 卷 xx 页)	发表时间年月日	通讯作者	第一作者	国内作者	SCI 他引次数	他引总次数	知识产权是否归国内所有
1	Dissipativity and contractivity for fractional-order systems/ <i>Nonlinear Dynamics</i> / Wang Dongling, Xiao Aiguo	3.464	2015 年 80 卷 287-294 页	2015 年 4 月 10 日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国	4	8	是
2	Dissipativity and Stability Analysis for Fractional Functional Differential Equations/ <i>Fractional Calculus and Applied Analysis</i> / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Hongliang Liu	2.034	2015 年 18 卷 1399-1422 页	2015 年 12 月 5 日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 刘红良	3	6	是

3	Parametric symplectic partitioned Runge-Kutta methods with energy-preserving properties for Hamiltonian systems / Computer Physics Communications / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Xueyang Li	3.936	2013年184卷 303-310页	2013年2月10日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 李雪阳	5	11	是
4	Crank-Nicolson difference scheme for the coupled nonlinear Schrodinger equations with the Riesz space fractional derivative / Journal of Computational Physics / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Wei Yang	2.744	2013年242卷 670-681页	2013年6月1日	肖爱国	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 杨伟	46	56	是
5	A linearly implicit conservative difference scheme for the space fractional coupled nonlinear Schrödinger equations / Journal of Computational Physics / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Wei Yang	2.744	2014年272卷 644-655页	2014年9月1日	肖爱国	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 杨伟	26	33	是
6	Maximum-norm error analysis of a difference scheme for the space fractional CNLS / Applied Mathematics and Computation / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Wei Yang	1.738	2015年257卷 241-251页	2015年5月15日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 杨伟	13	17	是
7	Weighted finite difference methods for a class of space fractional partial differential equations with variable coefficients / Journal of Computational and Applied Mathematics / Zhiqing Ding, Aiguo Xiao, Min Li	1.357	2010年233卷 1905-1914页	2010年2月15日	肖爱国	丁志清	丁志清, 肖爱国, 李敏	24	31	是
8	Fractional variational integrators for fractional variational problems / Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation / Dongling Wang, Aiguo Xiao	2.784	2012年17卷 602-610页	2012年2月1日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国	10	15	是
合 计								131	177	

六、主要完成人情况

肖爱国： 第一完成人，省国防科技重点实验室主任，教授，工作单位：湘潭大学，完成单位：湘潭大学，对本项目技术创造性贡献是：本项目负责人，负责项目的立项申报、组织实施，提出了所有科学发现的主要思想及整体研究思路，指导和参与了整个研究过程，对所有科学发现均做出了创造性贡献，培养了包括第二完成人在内的一批优秀人才。是所有代表性论文的第二作者及其中 3 篇的通讯作者。在本项目中的工作量占本人工作量的 60%。

王冬岭： 第二完成人，副教授，工作单位：西北大学，完成单位：西北大学，对本项目技术创造性贡献是：对科学发现 1-3 和 5 均做出了创造性贡献。是 8 篇代表性论文中 7 篇的第一作者。在该项目中的工作量占本人工作量的 90%。

七、完成人合作关系说明

第一完成人肖爱国是第二完成人王冬岭在湘潭大学硕博连读阶段（2007 年 9 月至 2013 年 6 月）的指导教师。第二完成人的研究方向为保结构算法与分数阶微分方程数值方法。此阶段，按照第一完成人的学术思想、研究思路和研究方案，由第二完成人具体实施，两人一起讨论，合作完成了论文 6 篇，并均已发表于高影响的 SCI 期刊，包括项目的代表性论文[3-5,8]。

第二完成人王冬岭毕业后到西北大学数学学院工作，继续本项目的研究，并与第一完成人保持密切的学术联系，每年均回湘潭大学访问，项目代表性论文[1-2,6]就是此阶段的合作科研成果。

项目代表性论文[7]的第一作者丁志清是第一完成人指导的硕士生（2005 年 9 月至 2008 年 6 月期间在读）。该文是她的硕士学位论文的主要内容。第一完成人提供了全过程的具体指导（包括选题、思路、证明方法等）。因此，经丁志清本人同意，未将她列入主要完成人。

项目代表性论文的其他作者在相应研究中发挥了辅助作用。