

# 2019 年度湖南省自然科学奖提名公示

## 一、项目名称

几类分数阶微分方程的数值方法与理论分析

## 二、提名单位意见

分数阶微分方程具有广泛的应用背景，能更好描述许多复杂过程和现象，其建模、理论、计算、应用已成为众多领域的研究热点。

该项目针对几类典型分数阶微分方程理论和计算中的一些困难且重要的问题进行了深入系统研究，主要科学贡献有：提出了空间分数阶 Schrodinger 方程的保持离散质量的差分格式（国际上分数阶方程的第一个守恒格式），构造了同时保离散质量和能量的差分格式，创建了离散空间分数阶嵌入不等式及格式的收敛性理论，为分数阶量子系统长时间模拟提供了有效算法；提出了弱意义下保能量辛可分 Runge-Kutta 方法，实质推进了 Hamilton 系统数值方法同时保辛结构和能量此公开问题的解决；创建了非线性时间分数阶泛函微分方程系统的长时间收缩性和耗散性理论及分数阶 Halanary 不等式，首次获代数收缩、耗散率的精确估计，促进了分数阶系统稳定性和长时间数值分析的研究，提供了有力工具；提出了时间分布阶反常扩散方程的基于有限差分和有限元的计算框架及一类变系数空间分数阶对流扩散方程的加权差分格式；系统发展了分数阶变分问题的分数阶变分积分子。

该项目成果突出，发表了一批高水平论文，科学上取得了重要进展，被国内外同行所公认和广泛引用，产生了显著的学术影响。项目成果具有重要的理论和应用价值，推动了计算数学学科的发展。学校已按要求对该项目进行了公示，公示期内无异议。

提名该项目为湖南省自然科学奖二等奖。

## 三、项目简介

对于具有遗传记忆特征或长程效应的复杂过程和现象（如反常扩散），分数阶微分方程通常比整数阶微分方程描述得更准确，因而引起了人们的关注和重视，其建模、理论、计算已成为众多领域的研究热点，并广泛应用于多孔介质、软物质、信号和图象、生物医学、控制等领域。但是，分数阶微分方程所具有的弱奇异性及非局部特征：长期历史记忆性或空间全域相关性，给其理论和数值分析带来了挑战。

解的低正则性、巨大的计算量和存储量又使得高效和适于长时间计算的数值方法的构造及分析十分困难。同时，分数阶微分方程同整数阶微分方程一样，也存在某些守恒量（如质量、能量等），而对于长时间计算，保持这些守恒量及特性是很重要的，我们首先关注到了这点。

项目针对分数阶微分方程数值方法（特别是守恒算法）及非线性时间分数阶系统理论中一些困难且重要的问题，开展了广泛而深入的研究，主要创新点为：

(1)提出了国际上求解分数阶方程的第一个守恒格式：空间分数阶 Schrödinger 方程的保离散质量差分格式。针对空间分数阶 Schrödinger 方程，进一步构造了同时保持离散质量和能量的线性隐式差分格式，通过创建离散空间分数阶嵌入不等式获得了格式的最大模收敛阶；为分数阶量子力学系统长时间数值模拟提供了有效算法，也使分数阶方程保结构数值方法成为研究热点之一。

(2)提出了弱意义下保能量的辛可分 Runge-Kutta 方法，实质推进了 Hamilton 系统数值方法同时保辛和保能量这一公开问题的解决。

(3)创建了非线性时间分数阶泛函微分方程系统的收缩性和耗散性理论及分数阶 Halanary 不等式，并首次获得代数收缩率、耗散率的精确估计（与整数阶方程的指数收缩率和耗散率具有本质差异；促进了分数阶系统稳定性和长时间数值分析的研究，提供了有力工具。

(4)发展了关于时间分布阶反常扩散方程的一种基于有限差分 and 有限元的计算框架，并给出了三类有限差分有限元组合格式；提出了一类变系数空间分数阶对流扩散方程的加权差分格式，统一了著名专家的相应工作。

(5)系统发展了求解分数阶变分问题的有效新方法：分数阶变分积分子。

项目组得到 3 项国家自然科学基金项目及 1 项湖南省教育厅重点项目的资助，发表相关 SCI 论文 40 多篇。8 篇代表作均发表于计算与应用数学的重要国际主流期刊，他引 233 次，SCI 他引 163 次，引文大多来自一流计算与应用数学及工程期刊 SIAM J. Sci. Comput., J. Comput. Phys., IEEE T. Neur. Net. Lear.等。得到了美国《数学评论》和包括院士、IEEE 会士、APS 会士、著名 SCI 期刊（副）主编在内的许多著名同行和相关领域专家的多次引用和高度评价，在国内外产生了重要学术影响。项目培养了一批研究生，其中博士生 6 名（共获 6 项国家自然科学基金青年和面上项目），第二完成人入选了陕西省青年科技新星。

#### 四、客观评价

被美国《数学评论》及一些重要论文、综述及专著中所引用。8 篇代表作他引

233 次，SCI 他引 163 次，单篇 SCI 他引最高 60 次。下面仅列出代表性评价。

### 1. 空间分数阶非线性耦合 Schrödinger 方程的守恒格式

对于代表作 1，美国数学评论及著名同行专家 Z. Sun 等发表于 SIAM J. Sci. Comput. 的论文中均有长篇正面评述[附件代表性引文 1、其他证明 MR3062053]；著名同行专家 C. Hunag 指出 “... The only result ... is given by Wang et al. [12], who derived mass-conservative difference scheme for ... fractional Schrödinger equations (对分数 Schrödinger 方程 ... 唯一结果是[12]的质量守恒格式)” ([12]: 代表作 1) [J. Comput. Phys. 293(2015)238-251]；其它文献也认可我们提出了分数阶方程的第一个守恒格式，如[Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 41(2016)64-83]等。

对于代表作 1-2，著名同行专家 A. Bhrawy 认为 “In a series of papers by Wang et al. [51-53], efficient numerical schemes were studied for coupled nonlinear space-fractional Schrödinger equations with Riesz fractional derivative (王等的系列论文 [51-53]研究了非线性空间分数阶耦合 Schrödinger 方程的有效数值方法)” ([51-52]: 代表作 1-2) [附件代表性引文 2]。

对于代表作 2，田纳西州立大学教授 A. Khaliq 等在[Numer. Algor. 75(2017)147-172]中有 7 处引用，并表明其工作是基于代表作 2；澳门学者 S. Vong 在[J. Sci. Comput. 76(2018)1252-1273]等多文中指出我们的线性化格式 “very efficiently (很有效)”。

### 2. 保辛保能量参数化可分 Runge-Kutta 方法

著名计算数学家、佛罗伦萨大学教授 L. Brugnano 在专著、专题讲义、论文中多次引用和认可代表作 3 的工作，例如：

“obtain methods that, in a weaker sense, have both the property of symplecticity and energy-conservation (较弱意义下获同时保辛和能量的方法)” [附件代表引文 3]；

“a noticeable extension of this approach, for PRK methods, has been recently devised in [60] (对于 PRK 方法，一引人注目的扩展最近由[60]给出)” ([60]: 代表作 3) [中国科学院专题讨论班讲义, arXiv: 1301.2367v1, 2013]。

### 3. 时间分数阶系统的收缩性、耗散性理论及分数阶 Halanary 不等式

对于代表作 4，美国数学评论认为：“is innovative and the proofs are rigorous. This is a well-written paper containing interesting and new results, which enriches the theory of fractional-order systems (是创新的，证明严谨，写得很好，包含有趣新结果，丰富了分数阶系统理论)” [附件其他证明 MR3324261]；澳大利亚 H. Trinh 教授等肯定了我们工作的意义 “The study of dissipativity and its variants ... provide useful tools for

the problem of stability analysis and the control of dynamical systems（耗散性及变形为研究系统稳定性问题和动力学系统控制提供了有用工具）” [附件代表性引文 4]。

对于代表作 4-5, IEEE 会士、欧洲科学院院士 Jinde Cao 等在代表性引文 5 中有 5 处长篇幅引用, 在摘要中指出“Based on fractional Halanay inequality ... some new sufficient conditions are obtained that guarantee dissipativity...global asymptotic stability of FCVNNs(基于分数 Halanay 不等式 ... 给出一些新充分条件使时滞分数阶复值神经网络有耗散性和全局渐近稳定性)”, 其中分数 Halanay 不等式引自代表作 5。

对于代表作 5, 美国数学评论认为“first establish fractional inequality of Halanay type. This is a major achievement(首次建立分数阶 Halanay 不等式, 这是重要成果)” [附件其他证明 MR3433020]; SIAM 和 APS 会士、布朗大学教授 G. Karniadakis 和牛津大学教授 K. Burrage 等通过 6 处引用和评述了我们关于分数阶 Lorenz 系统耗散性和吸引集的结果[J. Sci. Comput. 77(2018)283-307, SIAM J. Sci. Comput. 40(2018) A2986-A3011]; 文[Neurocomputing 314(2018)20-29]指出其工作是“Based on the idea in [21] (基于[21]的思想)” ([21]: 代表作 5), 全文有 17 处长篇幅引用。

#### 4. 时间分布阶和变系数分数阶扩散方程的数值方法

对于代表作 6, 南洋理工大学教授 P. Wong 等指出“There has been some pioneer work on numerical treatment of distributed order fractional differential equations<sup>25,32-37</sup> (在分布阶分数阶微分方程的数值处理上, [25,32-37]做了一些开创性工作)” ([32]: 代表作 6) [附件代表性引文 6]; 美国数学评论认为“develop a finite difference/finite element based computational framework for DOFDEs (发展了一种基于有限差分和有限元的关于时间分布阶微分方程的计算框架)” [附件其他证明 MR3661111]。

对于代表作 7, 明尼苏达大学教授 V. Voller 等认为它“made significant numerical analysis advances in treating fractional derivative equations (在分数阶方程数值分析上取得了显著进展)” [附件代表性引文 7]; 罗马尼亚空间科学所教授 D. Baleanu 的多篇论文进行了引用, 并指出它是密歇根州立大学教授 M. Meerschaert 关于显式和隐式欧拉方法及分数 Crank-Nicholson 方法的扩展[Inter. J. Bifur. Chaos 22(4)(2012)]。

#### 5. 分数阶变分积分子

著名同行专家 S. Yousefi 等认可“fractional variational integrator in [19] are developed and applied (分数变分积分子由[19]所发展并应用)” ([19]: 代表作 8) [附件代表性引文 8]。这点也被其它多篇 SCI 论文指出, 如[J. Comput. Appl. Math. 283 (2015)41-57], [Numer. Algor. 72(2016)959-987]等。

著名分析力学家 Fengxiang Mei 等以代表作 8 等的工作为基础，发展了分数阶 Birkhoff 系统变分积分分子[Nonlinear Dyn. 87(2017)2325]。著名专家 D. Baleanu 等在[J. Optim. Theory. Appl. 174(2017)295, Numer. Algor. 72(2016)959]中各有 5 处引用。

## 五、代表性论文专著目录

序号	论文专著 名称/刊名 /作者	影响 因子	年卷页码 (xx年xx 卷xx页)	发表时 间年月 日	通 讯 作 者	第 一 作 者	国 内 作 者	SCI 他 引 次 数	他 引 总 次 数	知识产 权是否 归国内 所有
1	Crank-Nicolson difference scheme for the coupled nonlinear Schrodinger equations with the Riesz space fractional derivative / Journal of Computational Physics / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Wei Yang	2.744	2013 年 242 卷 670-681 页	2013 年 6 月 1 日	肖爱国	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 杨伟	60	73	是
2	A linearly implicit conservative difference scheme for the space fractional coupled nonlinear Schrödinger equations / Journal of Computational Physics / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Wei Yang	2.744	2014 年 272 卷 644-655 页	2014 年 9 月 1 日	肖爱国	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 杨伟	37	52	是
3	Parametric symplectic partitioned Runge-Kutta methods with energy-preserving properties for Hamiltonian systems / Computer Physics Communications / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Xueyang Li	3.936	2013 年 184 卷 303-310 页	2013 年 2 月 10 日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 李雪阳	6	17	是
4	Dissipativity and contractivity for fractional-order systems / Nonlinear Dynamics/ Wang Dongling, Xiao Aiguo	3.464	2015 年 80 卷 287-294 页	2015 年 4 月 10 日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国	9	13	是
5	Dissipativity and stability analysis for fractional functional differential equations/ Fractional Calculus and Applied Analysis / Dongling Wang, Aiguo Xiao, Hongliang Liu	2.034	2015 年 18 卷 1399- 1422 页	2015 年 12 月 5 日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国, 刘红良	6	10	是

6	Finite difference/finite element methods for distributed-order time fractional diffusion equation / Journal of Scientific Computing / Weiping Bu, Aiguo Xiao, Wei Zeng	1.738	2015 年 257 卷 241-251 页	2015 年 5 月 15 日	肖爱国	王冬岭	卜玮平, 肖爱国, 曾维	6	14	是
7	Weighted finite difference methods for a class of space fractional partial differential equations with variable coefficients / Journal of Computational and Applied Mathematics / Zhiqing Ding, Aiguo Xiao, Min Li	1.357	2010 年 233 卷 1905-1914 页	2010 年 2 月 15 日	肖爱国	丁志清	丁志清, 肖爱国, 李敏	26	36	是
8	Fractional variational integrators for fractional variational problems / Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation / Dongling Wang, Aiguo Xiao	2.784	2012 年 17 卷 602-610 页	2012 年 2 月 1 日	王冬岭	王冬岭	王冬岭, 肖爱国	13	18	是
合 计								163	233	

## 六、主要完成人情况

**肖爱国：** 第一完成人，省国防科技重点实验室主任，教授，工作单位：湘潭大学，完成单位：湘潭大学，对本项目主要学术贡献：本项目负责人。主要贡献包括：负责项目的立项申报、组织实施，提出了所有科学发现的主要思想及整体研究思路，指导和参与了整个研究过程，对所有科学发现均做出了创造性贡献，培养了包括第二完成人在内的一批优秀人才。是所有代表性论文的第二作者及代表性论文 1、2、6、7 的通讯作者。在本项目中的工作量占本人工作量的 70%

**王冬岭：** 第二完成人，副教授，工作单位：西北大学，完成单位：西北大学，对本项目主要学术贡献：对重要科学发现 1-3 和 5 均做出了创造性贡献。是代表性论文 1-5、8 的第一作者。在该项目中的工作量占本人工作量的 90%。

**卜玮平：** 第三完成人，讲师，工作单位：湘潭大学，完成单位：湘潭大学，对本项目主要学术贡献：对重要科学发现 4 做出了创造性贡献。是代表性论文 6 的第一作者。在该项目中的工作量占本人工作量的 30%。

## 七、完成人合作关系说明

第一完成人肖爱国是第二完成人王冬岭在湘潭大学硕博连读阶段（2007年9月至2013年6月）的指导教师。第二完成人的研究方向为保结构算法与分数阶微分方程数值方法。此阶段，按照第一完成人的学术思想、研究思路和研究方案，由第二完成人具体实施，两人一起讨论，合作完成了论文6篇，并均已发表于高影响的SCI期刊，包括项目的代表性论文1-3,8。

第二完成人王冬岭毕业后到西北大学数学学院工作，继续本项目的研究，并与第一完成人保持密切的学术联系，每年均回湘潭大学访问，项目代表性论文4-5就是此阶段的合作科研成果。

项目代表性论文6的第一作者卜玮平与第一完成人是同单位同一课题组的成员，是项目的第三完成人。此文主要由第一、三完成人合作完成。

项目代表性论文7的第一作者丁志清是第一完成人指导的硕士生（2005年9月至2008年6月期间在读）。该文是她的硕士学位论文的主要内容。第一完成人提供了全过程的具体指导（包括选题、思路、证明方法等）。因此，经丁志清本人同意，不将她列入主要完成人，且出具了知情同意证明。

项目代表性论文的其他作者在相应研究中发挥了辅助作用。